B. Rama Devi

1-4-112

THREE YEAR B.A./B.Sc. DEGREE EXAMINATION — APRIL/MAY 2018

CHOICE BASED CREDIT SYSTEM

FOURTH SEMESTER

Part II – Mathematics

Paper I — REAL ANALYSIS

(w.e.f. 2016-2017)

Time : 3 hours — Max. Marks : 75

PART - A

Answer any FIVE of the following.

ఏవైనా ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

(Marks : 5 × 5 = 25)

1. Prove that the sequence $\{S_n\}$ defined by $S_n = 1 + \frac{1}{\angle 1} + \frac{1}{\angle 2} + \cdots + \frac{1}{\angle n}$ is convergent. (5)

   $\{S_n\}$ అనుక్రమాన్ని $S_n = 1 + \frac{1}{\angle 1} + \frac{1}{\angle 2} + \cdots + \frac{1}{\angle n}$ గా నిర్వచిస్తే ఇది అభిసరిస్తుందని చూపండి.

2. If $\{S_n\}$ is a Cauchy sequence then show that $\{S_n\}$ is convergent. (5)

   $\{S_n\}$ అనునది కోషీ అనుక్రమము అయితే $\{S_n\}$ అభిసరిస్తుందని చూపండి.

3. Test for convergence $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^n}$. (5)

   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^n}$ యొక్క అభిసరణను పరిశీలించండి.

4. Solve and prove Leibnitz test for alternating series. (5)

   ఏకాంతర శ్రేణులకు లెబ్నిజ్ పరీక్షను నిర్వచించి నిరూపించండి.

5. Examine the continuity of $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ for $x \neq 0$ and $f(x) = 1$ for $x = 0$ at $x = 0$. (5)

   $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ $x \neq 0$ మరియు $f(x) = 1$ అగునట్లు $x = 0$ at $x = 0$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నాన్ని పరిశీలించండి.

[P.T.O.]

6. If a function f is continuous on $[a, b]$ then show that it is uniformly continuous on $[a, b]$. (5)

$[a, b]$ లో f అనుప్రమేయము అవిచ్ఛిన్నమయితే అది $[a, b]$ లో ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నము అవుతుందని చూపండి.

7. If $f : [a, b] \to R$ is derivable at $c \in [a, b]$ then show that f is continuous at c.

$f : [a, b] \to R$ అనునది $c \in [a, b]$ వద్ద అవకలనమయితే c వద్ద f అవిచ్ఛిన్నము అవుతుందని చూపండి. (5)

8. Show that $f(x) = |x| + |x-1|$ is not derivable at $x = 0$ and $x = 1$.

$f(x) = |x| + |x-1|$ అనునది $x = 0$ మరియు $x = 1$ వద్ద అవకలము కాదు అని చూపండి. (5)

9. If $f \in R[a, b]$ and m, M are Infimum and Supremum of f on $[a, b]$ then show that

$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le n(b-a)$.

$f \in R[a, b]$ మరియు m, M యొక్క $[a, b]$ లో అల్పిష్ఠ, గరిష్ఠాలయితే $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le n(b-a)$ అనిచూపండి.

10. If $f(x) = x^2$ on $[0, 1]$ and $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1\right\}$. Compute $L(P, f)$ and $L(P, f)$. (5)

$f(x) = x^2$ అనునది $[0, 1]$ లో అయితే మరియు $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1\right\}$ అయితే $L(P, f)$ మరియు $L(P, f)$ లను కనుక్కోండి.

PART - B

Answer ALL questions, each question carries 10 marks.

అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము. ప్రతి ప్రశ్నకు మార్కులు సమానము.

(Marks : 5 × 10 = 50)

11. Show that a monotonic sequence $\{S_n\}$ is convergent iff it is bounded. (10)

ఏకదిష్ట అనుక్రమము $\{S_n\}$ అభిసరించడానికి, అది పరిబద్ధము అనునది అవశ్యక, పర్యాప్త నియమము అని చూపండి.

Or

12. Prove that the sequence $\{S_n\}$ defined by $S_1 = \sqrt{C} > 0$, $S_{n+1} = \sqrt{C + S_n}$, $\forall\, n \in Z^+$ converges to the positive root of $x^2 - x - C = 0$. (10)

$S_1 = \sqrt{C} > 0$, $S_{n+1} = \sqrt{C + S_n}$, $\forall\, n \in Z^+$ అగునట్లు $\{S_n\}$ అనుక్రమము $x^2 - x - C = 0$ యొక్క ధనమూలానికి అభిసరిస్తుందని చూపండి.

$S_2 = \sqrt{C+S_1} = \sqrt{C+\sqrt{C}} > 0$

$S_3 = \sqrt{C+S_2}$

13. Examine the convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ when $p > 1$ and $p \leq 1$. (10)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ అనుశ్రేణి యొక్క అభిసరణను $p > 1$ మరియు $p \leq 1$ అయినపుడు అభిసరణను చర్చించండి.

Or

14. State D'Alembert's ratio test, and test for convergence $2x + \frac{3x^2}{8} + \frac{4x^3}{27} + \cdots (x > 0)$. (10)

D' అలంబర్ట్ నిష్పత్తి పరీక్షను నిర్వచించి, $2x + \frac{3x^2}{8} + \frac{4x^3}{27} + \cdots (x > 0)$ శ్రేణి యొక్క అభిసరణను పరిశీలించండి.

15. If f is continuous on $[a, b]$ and $f(a)$, $f(b)$ have opposite signs then show that $\exists\, c \in (a, b)$ such that $f(c) = 0$. (10)

f అనుప్రమేయము $[a, b]$ లో అవిచ్ఛిన్నము మరియు $f(a)$, $f(b)$ లకు వ్యతిరేక గుర్తులుంటే $\exists\, c \in (a, b)$ అయితే $f(c) = 0$ అని రుజువు చేయండి.

Or

16. Let $f : R \to R$ be such that $f(x) = \frac{\sin(a+1)x + \sin x}{x}$ for $x < 0$, $f(x) = c$ for $x = 0$ and $f(x) = \frac{(x + bx^2)^{1/2} - x^{1/2}}{bx^{3/2}}$ for $x > 0$. Determine the values of a, b, c for which the function is continuous at $x = 0$. (10)

$f : R \to R$ ను $f(x) = \frac{\sin(a+1)x + \sin x}{x}$ $x < 0$, $f(x) = c$ $x = 0$ మరియు $f(x) = \frac{(x + bx^2)^{1/2} - x^{1/2}}{bx^{3/2}}$ $x > 0$ అగునట్లు $x = 0$ వద్ద ప్రమేయము అవిచ్ఛిన్నము అయితే a, b, c $x = 0$ విలువలు కనుక్కోండి.

17. Prove that $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{15} < \sinh^{-1} 0.6 < \frac{\pi}{6} + \frac{1}{8}$. (10)

$\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{15} < \sinh^{-1} 0.6 < \frac{\pi}{6} + \frac{1}{8}$ నిరూపించండి.

Or

18. State and prove Taylor's theorem with Cauchy form of remainder. (10)

కోషీ అవశేషాన్ని కల్గిన టేలర్ సిద్ధాంతాన్ని నిర్వచించి నిరూపించండి.

19. Show that $f(x) = 3x + 1$ is integrable on $[1, 2]$ and $\int_1^2 (3x+1)\,dx = \frac{11}{2}$. (10)

$f(x) = 3x + 1$ అనునది $[1, 2]$ లో సమాకలనము అవుతుంది అనిచూపండి మరియు $\int_1^2 (3x+1)\,dx = \frac{11}{2}$ అని చూపండి.

Or

20. State and prove fundamental theorem of Riemann integration. (10)

రీమాన్ సమాలనము యొక్క మూలసిద్ధాంతాన్ని నిర్వచించి నిరూపించండి.

$S_1 = \sqrt{c}$

$n = 1 \quad S_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}}$

S_3

[Total No. of Pages : 4 **1-4-112**

THREE YEAR B.A./B.Sc DEGREE EXAMINATION MAY-2017

CHOICE BASED CREDIT SYSTEM

FOURTH SEMESTER

PART - II : MATHEMATICS

PAPER - I : REAL ANALYSIS

(w.e.f. 2016-17)

Time : 3 Hours Max. Marks :75

Part - A

విభాగము - A

Answer any **Five** of the following. **(5 × 5 = 25)**

క్రింది వాటిలో ఏవైన ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానాలు ఇవ్వుము. ఒక్కొక్క ప్రశ్నకు ఐదు మార్కులు.

1. Test the convergence of the sequence $S_n = \frac{2n^2+3}{n^2+1}$.

$S_n = \frac{2n^2+3}{n^2+1}$ యొక్క అభిసరణతను పరీక్షించండి.

2. Define a monotone sequence and give an example.

ఏకదిష్ట అనుక్రమంను నిర్వచించి ఒక ఉదాహరణ ఇవ్వండి.

3. Test the convergence $\sum \frac{2n^3+5}{4n^5+1}$.

$\sum \frac{2n^3+5}{4n^5+1}$ యొక్క అభిసరణతను పరీక్షించండి.

4. Test the convergence $\sum \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{-n^3}{2}}$.

$\sum \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{-n^3}{2}}$ యొక్క అభిసరణతను పరీక్షించండి.

5. Define continuity of a function and determine the points of continuity of $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}\,(x\in\mathbb{R})$.

2

ప్రమేయం యొక్క అవిచ్ఛిన్నతను నిర్వచింపుము .మరియు $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}$ కు $(x\in\mathbb{R})$ అవిచ్ఛిన్న బిందువులను కనుగొనుము.

6. Test the differentiability of the function $f(x)=x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right),\ x\neq 0$

$$f(x)=0,\ x=0$$

$f(x)=x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right),\ x\neq 0,\ f(x)=0,\ x=0$ ప్రమేయం యొక్క అవకలనీయతను పరీక్షించండి.

7. Verify Rolle's theorem for $f(x)=\cos x$ in $[\pi, 5\pi]$

$f(x)=\cos x$ in $[\pi, 5\pi]$ ప్రమేయముకు రోలె సిద్ధాంతమును పరిశీలించండి.

8. If $f(x)=x$ on $[0, 1]$ and $P=\left\{0,\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},1\right\}$ find U(p.f) and L(p.f).

$[0, 1]$ మీద $f(x)=x$ ప్రమేయాన్ని ఒక విభజన $P=\left\{0,\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},1\right\}$ అయితే L(p,f), U(p,f) కనుక్కోండి.

Part - B

విభాగము - B

Answer **All** questions. Each question carries **10** Marks. **(5 × 10 = 50)**

క్రింది ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానాలు ఇవ్వండి. ఒక్కొక్క ప్రశ్నకు పది మార్కులు.

10

9. a) State and prove cauchy convergence criterion.

కోషి అనుక్రమం అభిసరణతను నిర్ణయించే నియమాన్ని ప్రవచించి నిరూపించుము.

OR

b) Establish the convergence and find the limits of

i) $\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}$ ii) $\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{n}$

ప్రమేయాల యొక్క అభిసరణతను పరీక్షించి, అవధులను కనుక్కోండి.

10. a) Test the convergence of the series $\sum \frac{x^{2n-2}}{(n+1)\sqrt{n}}$.

$\sum \frac{x^{2n-2}}{(n+1)\sqrt{n}}$ శ్రేణి యొక్క అభిసరణతను పరీక్షించండి.

OR

b) Define absolute and conditional convergent and Test the series $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + ...$

సంపూర్ణాభిసరణం మరియు నియతాభిసరణం నిర్వచించండి మరియు $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + ...$ శ్రేణి అభిసరణతను పరీక్షించండి.

11. a) Examine the continuity of the function $f(x) = |x| + |x-1|$ at $x = 0,1$.

$x = 0,1$ ల వద్ద $f(x) = |x| + |x-1|$ గా నిర్వచింపబడిన ప్రమేయము యొక్క అవిచ్ఛిన్నతను పరీక్షించండి.

OR

b) If $f(x)$ is continuous on [a, b], then prove that $f(x)$ is uniformly continuous on [a, b].

[a, b] మీద f ప్రమేయము అవిచ్ఛిన్నమయితే, అపుడు అది [a, b] మీద ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నమని నిరూపించండి.

12. a) State and prove Lagranges mean value Theorem.

లెగ్రాంజి మధ్యము మూల్య సిద్ధాంతమును ప్రవచించి నిరూపించుము.

OR

b) If a < b, prove that $\frac{b-a}{1+b^2} < \left(\tan^{-1} b - \tan^{-1} a\right) < \frac{b-a}{1+a^2}$, hence deduce $\frac{5\pi+4}{20} < \tan^{-1} 2 < \frac{\pi+2}{4}$.

a < b అయితే $\frac{b-a}{1+b^2} < \left(\tan^{-1} b - \tan^{-1} a\right) < \frac{b-a}{1+a^2}$, అని నిరూపించండి తద్వారా $\frac{5\pi+4}{20} < \tan^{-1} 2 < \frac{\pi+2}{4}$ అని చూపండి.

13. a) If $f \in R$ [a, b] and m, M are the infimum and supremum of f on [a,b,] then,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

$f \in R$ [a, b] మరియు [a, b] మీద f యొక్క గరిష్ఠ దిగువ హద్దు మరియు కనిష్ఠ ఎగువ హద్దులు m, M లైతే $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$ అని నిరూపించండి.

OR

b) Prove that $f(x) = x^2$ in integrable on [0, a] and hence show that $\int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}$.

[0, a] మీద $f(x) = x^2$ సమాకలనీయమని మరియు $\int_0^a x^2\,dx = \frac{a^3}{3}$ అని నిరూపించుము.

❄❄❄

THREE YEAR B.A./B.Sc. DEGREE EXAMINATION — MARCH/APRIL 2019

CHOICE BASED CREDIT SYSTEM

FOURTH SEMESTER

Part – II : Mathematics

Paper I — REAL ANALYSIS

(w.e.f. 2016-2017)

Time : 3 hours

Max. Marks : 75

PART – A

పార్ట్ – ఎ

Answer any FIVE of the following questions.

Each question carries 5 marks.

ఏవైనా ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానము వ్రాయుము.

ప్రతి ప్రశ్నకు 5 మార్కులు.

(Marks : 5 × 5 = 25)

1. Test the convergence of the sequence $S_n = \frac{n^2}{n+1}$.

   $S_n = \frac{n^2}{n+1}$ అనుక్రమము యొక్క అభిసరణతను పరీక్షించండి.

2. Find the limit of the sequence $S_n = \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$.

   $S_n = \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$ అనుక్రమము యొక్క అవధులను కనుగొనుము.

3. Test the convergence $\sum\sqrt{\frac{3^n-1}{2^n-1}}$.

   $\sum\sqrt{\frac{3^n-1}{2^n-1}}$ యొక్క అభిసరణతను పరీక్షించండి.

4. Test the convergence $\sum \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}$.

$\sum \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}$ యొక్క అభిసరణతను పరీక్షించండి.

5. Define a bounded function and give an example of a bounded function.

పరిబద్ధత ప్రమేయాన్ని నిర్వచించి పరిబద్ధత ప్రమేయానికి ఒక ఉదాహరణ ఇవ్వండి.

6. Show that $f(x)=|x|+|x-1|$ is not derivable at $x=0$ and $x=1$.

$f(x)=|x|+|x-1|$ ప్రమేయము $x=0$ మరియు $x=1$ వద్ద అవకలనీయం కాదని చూపండి.

7. Discuss the applicability of Rolle's theorem for $f(x)=x^3-6x^2+11x-6;\quad a=1,\ b=3$.

$f(x)=x^3-6x^2+11x-6;\quad a=1,\ b=3$ ప్రమేయం వద్ద రోలె సిద్ధాంత ప్రయోగాన్ని విచారించండి.

8. If $f(x)=x^2$ on $[0,1]$ and $P=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},1\right\}$. Compute $U(p,f)$.

$[0,1]$ మీద $f(x)=x^2$ ప్రమేయానికి ఒక విభజన $P=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},1\right\}$ అయితే $U(p,f)$ కనుక్కోండి.

PART – B

పార్ట్ – బి

Answer ALL questions.

Each question carries 10 marks.

అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము.

ప్రతి ప్రశ్నకు 10 మార్కులు.

(Marks : $5 \times 10 = 50$)

9. (a) Define Cauchy sequence and show directly from the definition that

(i) $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$

(ii) $n+\frac{(-1)^n}{n}$

are Cauchy sequence (or) not.

కోషి అనుక్రమమును నిర్వచింపుము. ఈ నిర్వచనం నుండి :

(i) $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$

(ii) $n + \frac{(-1)^n}{n}$

కోషి అనుక్రమాలా కాదా అని చూపుము.

Or

(b) State and prove Bolzano-Weierstrass theorem for sequences.

బోల్జానో-వియర్‌స్ట్రాస్ సిద్ధాంతాన్ని అనుక్రమాలకు ప్రవచించి నిరూపించుము.

10. (a) Test the convergence of the series $\sum \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right) x^n, \ x > 0$.

$\sum \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right) x^n, \ x > 0$ శ్రేణి అభిసరణతని పరీక్షించండి.

Or

(b) State and prove Leibnitz test for alternating series.

ఏకాంతర శ్రేణికి లీబ్నిట్జ్ పరీక్ష ప్రవచించి నిరూపించుము.

11. (a) If $f(x)$ is continuous on $[a, b]$, then prove that $f(x)$ is uniformly continuous on $[a, b]$.

$[a, b]$ మీద f ప్రమేయము అవిచ్ఛిన్నమయితే, అప్పుడు అది $[a, b]$ మీద ఏకరూప అవిచ్ఛిన్నమని నిరూపించండి.

Or

(b) Prove that the function defined by

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{if } x \neq 0$$
$$= 0 \quad \text{if } x = 0$$

is continuous at $x = 0$.

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{if } x \neq 0$$
$$= 0 \quad \text{if } x = 0$$

ప్రమేయము $x = 0$ వద్ద అవిచ్ఛిన్నం అని నిరూపించండి.

12. (a) State and prove Cauchy's mean value theorem.

కోషి మధ్యమ మూల్య సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించంది.

Or

(b) If $a < b < 1$, prove that $\frac{b-a}{\sqrt{1-a^2}} < \left(\sin^{-1} b - \sin^{-1} a\right) < \frac{b-1}{\sqrt{1-b^2}}$, deduce that $\frac{\pi}{6} + \frac{1}{5\sqrt{3}} < \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) < \frac{\pi}{6} + \frac{1}{8}$.

$a < b < 1$ అయితే $\frac{b-a}{\sqrt{1-a^2}} < \left(\sin^{-1} b - \sin^{-1} a\right) < \frac{b-1}{\sqrt{1-b^2}}$ అని నిరూపించండి తద్వారా $\frac{\pi}{6} + \frac{1}{5\sqrt{3}} < \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) < \frac{\pi}{6} + \frac{1}{8}$ అని చూపండి.

13. (a) State and prove fundamental theorem of integral calculus.

సమాకలన మూల సిద్ధాంతమును ప్రవచించి నిరూపించండి.

Or

(b) Prove that $f(x) = \sin x$ is integrable on $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ and $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1$.

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ మీద $f(x) = \sin x$ సమాకలనీయమనీ మరియు $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1$ అని చూపండి.